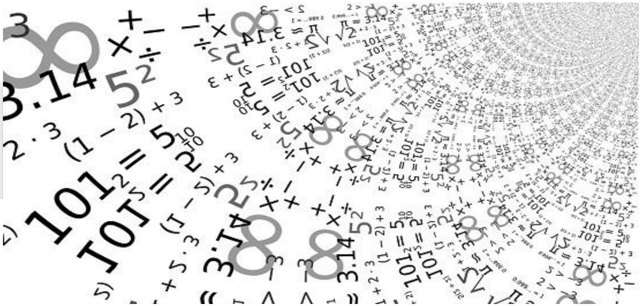
Příprava k maturitní zkoušce z matematiky

DEFINIČNÍ OBOR VÝRAZŮ – mocniny, odmocniny



Rozšířené okruhy z „KATALOGU POŽADAVKŮ ZKOUŠEK SPOLEČNÉ ČÁSTI MATURITNÍ ZKOUŠKY platný od školního roku 2015/2016 – MATEMATIKA".

Mgr. Ludmila Pěnčíková

DEFINIČNÍ OBOR VÝRAZŮ S MOCNINAMI A ODMOCNINAMI

Př. 1: Je dán výraz:

$$\sqrt{\frac{a^1 . b^6}{\sqrt{a^3}}} =$$

Výraz zjednodušte, zapište výsledek a podmínky, tj. hodnoty $a, b \in R$, pro které má výraz smysl.

Řešení - postup:

1. Úprava výrazu pomocí pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami, resp. pomocí pravidel pro počítání s **mocninami s racionálním exponentem** (nově přidáno do rozšířeného katalogu požadavků k maturitě z matematiky).

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}, n \in N, m \in Z, a \in R_0^+$$

$$Je - li\ m < 0, pak\ je\ pro\ odmocněnce\ podmínka\ a > 0.$$

2. Pro stanovení podmínek výrazu je třeba zohlednit, že výraz je zapsán ve formě zlomku (jmenovatel $\neq 0$) a také, že se ve výrazu vyskytují odmocniny ($\sqrt{x},\ x \geq 0$), resp. odmocniny ve jmenovateli ($\frac{1}{\sqrt{x},}\ x > 0$).

1. krok: Úprava výrazu – převod na mocniny s racionálními exponenty:

$$\sqrt{\frac{a^1 . b^6}{\sqrt{a^3}}} = \left(\frac{a^1 \cdot b^6}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{6}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^3}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)} \cdot b^3 = \mathrm{a}^{\frac{2-3}{4}} \cdot \mathrm{b}^3 = \mathbf{a}^{-\frac{1}{4}} \cdot \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}^3}{\mathbf{a}^{\frac{1}{4}}} = \frac{\mathbf{b}^3}{\sqrt[4]{\mathbf{a}}}$$

2. krok: Stanovení podmínek výrazu:

a) odmocnina ve jmenovateli: $\sqrt{a^3} \neq 0 \ \wedge a \geq 0, tzn. a > 0$

b) odmocnina v čitateli: a, b ≥ 0

Závěr: $\boldsymbol{a > 0 \wedge b \geq 0}$

Výsledek lze zapsat různými způsoby:

$\mathrm{a}^{-\frac{1}{4}} \cdot \mathrm{b}^3;\ a > 0 \wedge b \geq 0$

$\sqrt[4]{\mathrm{a}^{-1}} \cdot \mathrm{b}^3;\ a > 0 \wedge b \geq 0$

$\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{a}^{\frac{1}{4}}};\ a > 0 \wedge b \geq 0$

$\frac{\mathrm{b}^3}{\sqrt[4]{\mathrm{a}}};\ a > 0 \wedge b \geq 0$

Př. 2: **Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (2.1–2.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).**

Pro daný výraz platí uvedené podmínky: **ANO** **NE**

2.1 $\left[\frac{(x-2)^2}{x-3}\right]^3 . \left[\frac{x^2-9}{x-2}\right]; x \neq \pm 3, x \neq 2$ ☐ ☐

2.2 $(x-3).\sqrt{\frac{(x+3)}{(x-3)}};\ x \in R_0^+ - \{3\}$ ☐ ☐

2.3 $\sqrt{|x-3|}; pro\ \forall x \in R$ ☐ ☐

2.4 $\sqrt{|x|-3}; x \geq 3$ ☐ ☐

Řešení:

ad 2.1 $\left[\frac{(x-2)^2}{x-3}\right]^3 . \left[\frac{x^2-9}{x-2}\right]$, řešíme pouze jmenovatele zadaných zlomků: $x-3 \neq 0, x-2 \neq 0$

Závěr: $x \neq 3, x \neq 2$ správná odpověď: **NE**

ad 2.2 $(x-3).\sqrt{\frac{(x+3)}{(x-3)}}$ $\rightarrow$ podmínka pro odmocninu: $\frac{(x+3)}{(x-3)} \geq 0$, ve jmenovateli $x \neq 3$ *

Nerovnici lze řešit metodou nulových bodů:

1. krok: Z výrazu $\frac{(x+3)}{(x-3)}$ rozebereme funkce, které jsou v čitateli a jmenovateli:

$f: x+3$ lineární funkce rostoucí, graf - přímka procházející nulovým bodem $x = -3$

$g: x-3$ lineární funkce rostoucí, graf – přímka procházející nulovým bodem $x = 3$

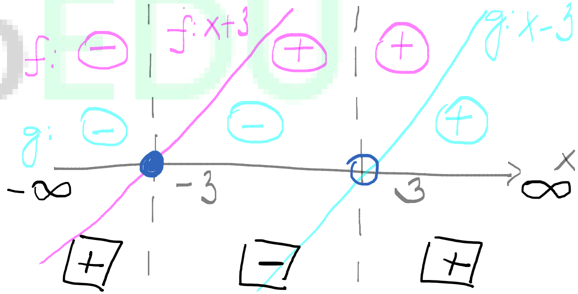
2. krok: Načrtneme si grafy funkcí f, g ,vyznačíme intervaly a podle průběhu funkce (z grafu) znaménka.

Pomůcka: Vše, co je pod osou x je záporné!

- výraz je zlomek → vyznačíme výsledné znaménko

v jednotl. intervalech – př.: $\frac{-}{-} = \boxed{+}$

* - nezapomeneme si vyznačit, zda nulové body patří nebo nepatří do definičního oboru



3. krok: Pro nerovnici $\frac{(x+3)}{(x-3)} \geq 0$ zapíšeme řešení: $\boldsymbol{x \in (-\infty; -3> \cup (3; \infty)}$ **NE**

levá strana nerovnice větší nebo rovna nule
zároveň $x \neq 3$

ad 2.3 $\sqrt{|x-3|}$ $\rightarrow$ podmínka pro odmocninu: $|x-3| \geq 0$ platí pro všechna reálná čísla (absolutní hodnota je vždy kladné číslo) **ANO**

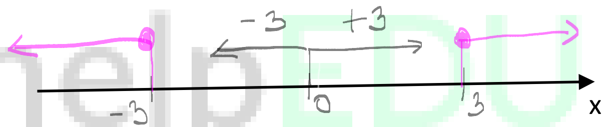
---

ad 2.4 $\sqrt{|x|-3}$; $|x|-3 \geq 0, tedy\ |x| \geq 3$

Při řešení využijeme **geometrický význam absolutní hodnoty** (vyjadřuje vzdálenost na číselné ose).

V našem případě absolutní hodnota x (nulový bod x=0) má být větší nebo rovna 3, tzn. vzdálenost od nulového bodu má být větší nebo rovna 3.

1. krok: Na číselné ose vyznačíme nulový bod a odměříme 3 jednotky na levou i pravou stranu od nulového bodu.



Pak si vyznačíme požadovanou vlastnost: vzdálenost větší nebo rovnou 3.

2. krok: Zapíšeme odpovídající řešení: $\boldsymbol{x} \in (-\infty; \mathbf{-3} > \cup < \mathbf{3}; \infty)$

správná odpověď **NE**

Správné řešení: **NE, NE, ANO, NE**

Př. 3: Přiřaďte ke každému výrazu (3.1 − 3.3) podmínky, pro které má výraz smysl (A – E).

3.1 $\frac{\sqrt{x-4}}{y^2-9}$ ________________

3.2 $\frac{y}{x^2+4}$ ________________

3.3 $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{(y^2-y-12)}}$ ________________

A) $každé\ x, y \in R$

B) $x \in <4; \infty) \wedge y \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

C) $x \in <4; \infty) \wedge y \in R - \{-3; 3\}$

D) $x \in <4; \infty) \wedge y \in (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$

E) $jiná\ podmínka$

Řešení: Využití znalostí o podmínkách výrazů, množinách, intervalech a řešení kvadratické nerovnice. ☺

3.1 $\frac{\sqrt{x-4}}{y^2-9}$

- podmínka pro odmocninu: $\sqrt{x-4}$; $x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$
- podmínka pro jmenovatel zlomku: $y^2-9 \neq 0$ POZOR! $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$(y-3)(y+3) \neq 0$$

$$y \neq \pm 3$$

- závěr: $\boldsymbol{x \geq 4} \wedge \boldsymbol{y \neq \pm 3}$, alternativní zápis $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{4}; \infty) \wedge \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R} - \{-\boldsymbol{3}; \boldsymbol{3}\}$

Správná odpověď: **C**

3.2 $\frac{y}{x^2+4}$ - zlomek: jmenovatel $\neq 0$, tj. $x^2+4 \neq 0$

(platí pro všechna reálná x, protože $x^2 \neq -4$ (x^2 je vždy kladné!)

- závěr: $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$.

Správná odpověď: **A**

3.3 $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{(y^2-y-12)}}$; podmínka pro odmocninu v čitateli: $\sqrt{x-4}$; $x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

$(-4)\cdot 3$

- podmínka pro odmocninu ve jmenovateli zlomku:

$\sqrt{(y^2-y-12)} \neq 0 \wedge (y^2-y-12) \geq 0 \Leftrightarrow (y^2-y-12) > 0$

$(y-4)(y+3) > 0$

$y_1 = 4;\ y_2 = -3$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad 4$

- závěr: $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{4}; \infty) \wedge \boldsymbol{y} \in (\infty; -\boldsymbol{3}) \cup (\boldsymbol{4}; \infty)$

Správná odpověď: **D**

$y \in (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$