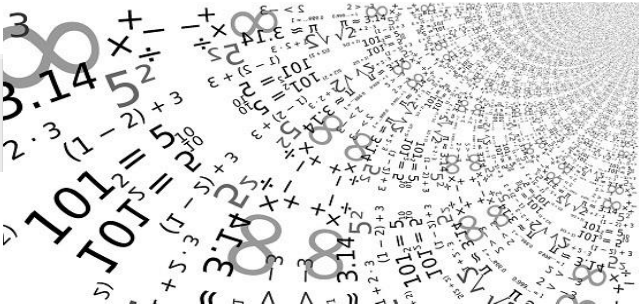
Příprava k maturitní zkoušce z matematiky

VÝRAZY S GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI



Rozšířené okruhy z „KATALOGU POŽADAVKŮ ZKOUŠEK SPOLEČNÉ ČÁSTI MATURITNÍ ZKOUŠKY platný od školního roku 2015/2016 – MATEMATIKA“.

Mgr. Ludmila Pěnčíková

ÚPRAVA VÝRAZŮ S GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

Př. 1: **Upravte výrazy a uveďte, kdy mají smysl:**

$$\frac{(\cos x + \sin x)^2}{1 + sin2x}$$

Řešení: Předpokládá znalosti o goniometrických funkcích (definiční obory, grafy, základní vzorce, příp. práce s tabulkami ☺).

Základní vzorce:

$$sin^2x + cos^2x = 1 \qquad x \in R$$

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$$

cos 2x = $cos^2x - \ sin^2x$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{co}tgx = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad x \neq k\pi$$

$$tgx\ .cotgx = 1 \qquad x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\qquad$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Řešení:

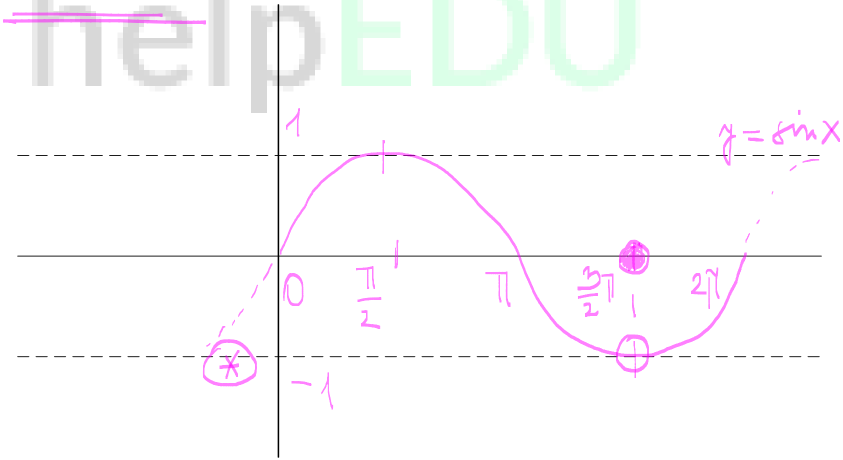
$$\frac{(\cos x + \sin x)^2}{1 + sin2x} = \frac{cos^2 x + 2\cos x . \sin x + \ sin^2 x}{1 + \ 2 \sin x . \cos x} = \frac{1 + 2\cos x . \sin x}{1 + \ 2\sin x . \cos x} = \underline{\underline{1}}$$

podmínky - jmenovatel $\neq 0$: $\quad 1 + 2\sin x \neq 0$

$sin2x \neq -1$ * $\qquad$ řešení goniometrické (ne)rovnice

$2x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $\qquad$ nesmíme zapomenout na periodu $2k\pi$

$\underline{x \neq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in Z}$



Př. 2 **Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (2.1 – 2.3), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).**

		ANO	NE
2.1	$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x} = \cos x,\ \ x \neq k.\pi, k \in Z$	☐	☐
2.2	$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x\,,\ \ x \neq \frac{\pi}{4} + k.\pi, k \in Z$	☐	☐
2.3	$\frac{(\cos x\,.tg\,x)^2 - 1}{cos^2 x} = \ -1;\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$	☐	☐

Řešení:

ad 2.1

$sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x} = \frac{1-(cos^2 x - \ sin^2 x)}{2\sin x} = \frac{1-cos^2 x + \ sin^2 x}{2\sin x} = \frac{sin^2 x + sin^2 x}{2\sin x} = \frac{2\ sin^2 x}{2\ sinx} = \sin x$$

Správná odpověď: **NE**

ad 2.2

$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{cos^2 x - \ sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x\ )\ (\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} = \ \cos x + \sin x$$

podmínky – jmenovatel $\neq 0$: $\cos x \neq \sin x,\, x \neq \frac{\pi}{4} + k.\pi, k \in Z$

Správná odpověď: **ANO**

---

ad 2.3

$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{(\cos x\, .tg\ x)^2\ -\ 1}{cos^2 x} = \frac{(\cos x\ .\ \frac{\sin x}{\cos x})^2 - 1}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x - 1}{cos^2 x} = \frac{-(1 - sin^2 x)}{cos^2 x} = \frac{-\ cos^2 x}{cos^2 x} = -1$$

podmínky – jmenovatel $\neq 0$: $cos^2 x\ \neq 0$

$\cos x\ \neq 0\,; x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

Správná odpověď: **ANO**

Př. 3 **Pro přípustné podmínky zjednodušte výraz:**

$$\frac{cotg^2x + 1}{1 + tg^2x}$$

Celé řešení zapište.

Řešení: V řešení použita úprava složeného zlomku.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{cotg^2x + 1}{1 + tg^2x} = \frac{\frac{1}{tg^2x} + 1}{1 + tg^2x} = \frac{\frac{1 + tg^2x}{tg^2x}}{\frac{1 + tg^2x}{1}} = \frac{1}{tg^2x} = \underline{\underline{cotg^2x}}$$