

Příprava k maturitní zkoušce z matematiky

RACIONÁLNĚ LOMENÁ FUNKCE



Rozšířené okruhy z „KATALOGU POŽADAVKŮ ZKOUŠEK SPOLEČNÉ ČÁSTI MATURITNÍ ZKOUŠKY platný od školního roku 2015/2016 – MATEMATIKA“.

Racionálně lomená funkce

Př. 1: Funkce f je dána předpisem

$$f: y = \frac{x + 3}{x}$$

- 1.1 Zapište definiční obor funkce f .
- 1.2 Určete průsečíky grafu funkce f se souřadnými osami.
- 1.3 Sestrojte graf funkce f .

Postup řešení: Pro řešení lineárně lomené funkce využíváme znalosti o nepřímé úměrnosti. 😊

ad 1.1 Lomený výraz \Rightarrow jmenovatel musí být různý od nuly $\Rightarrow x \neq 0$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

ad 1.2 Průsečíky grafu funkce f se souřadnými osami:

Průsečík se souřadnou osou x : $y = 0$

$$\frac{x + 3}{x} = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$X = [-3; 0]$$

Průsečík se souřadnou osou y neexistuje ($x \neq 0$).

ad 1.3

1. krok: Upravíme předpis funkce $f: y = \frac{x+3}{x}$

Pravou stranu zapíšeme jako součet zlomků $y = \frac{x}{x} + \frac{3}{x}$, zkrátíme na tvar: $y = 1 + \frac{3}{x}$, resp. $y - 1 = \frac{3}{x}$.

2. krok: Substituce – určení typu funkce a grafu

$y - 1 = \frac{3}{x}$; *substitute:* $y' = \frac{3}{x'}$ předpis nepřímé úměrnosti, graf hyperbola
($k > 0 \Rightarrow$ graf – větve hyperboly v I. a III. kvadrantu)

3. krok: Provedeme posunutí Kartézské soustavy souřadnic (dále jen „KSS“)

$$y' = y - 1; \quad x' = x$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1; \quad x = 0$$

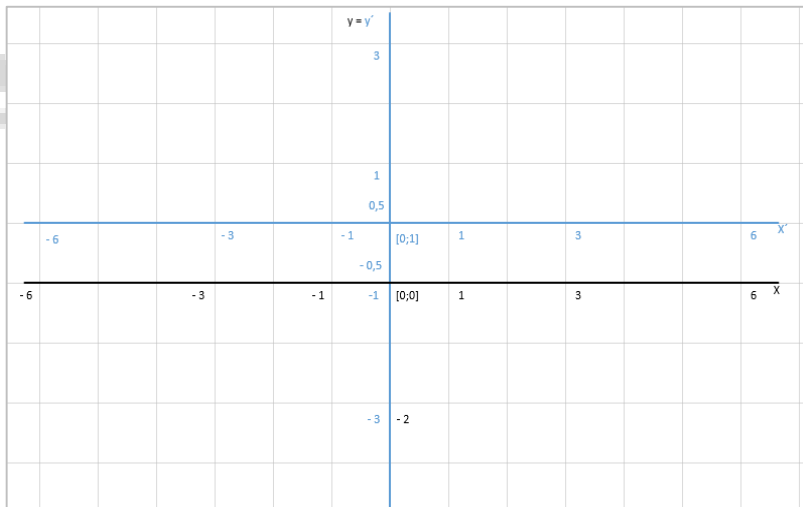
posunutí KSS do bodu $S = [0; 1]$ – do KSS

lze barevně vyznačit osy x', y' .

4. krok: Tabulka hodnot

Pro náčrt grafu potřebujeme aspoň 3 body

pro každou větev hyperboly.

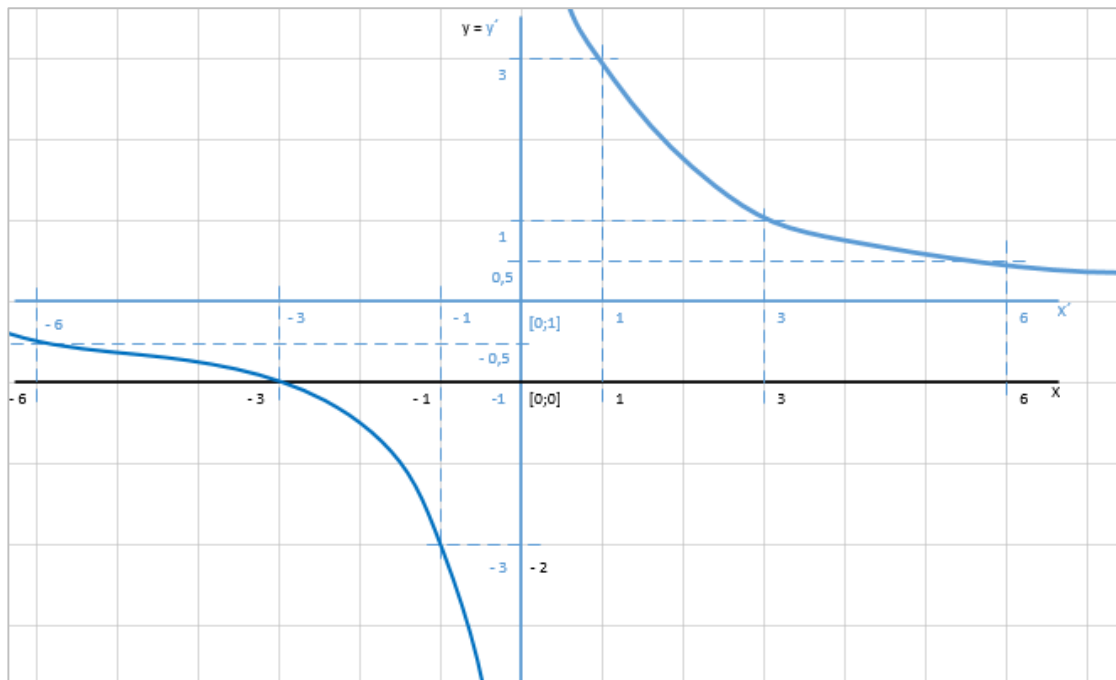


Dosazovat lze do upraveného funkčního předpisu $y' = \frac{3}{x'}$:

Body pak vynášíme do posunuté „barevné“ KSS.

5. krok: Narýsujeme graf funkce: $y = \frac{x+3}{x}$

x'	-6	-3	-1	1	3	6
y'	-0,5	-1	-3	3	1	0,5



Př. 2: Funkce f je dána předpisem

$$g: y = \frac{4x + 9}{x + 2}$$

2.1 Určete průsečíky grafu funkce g se souřadnými osami.

2.2 Zapište rovnice asymptot grafu funkce g .

2.3 Sestrojte graf funkce g .

Řešení: Předpis funkce g upravíme na tvar: $y = \frac{k}{x-m} + n$

1. způsob – úprava čitatele – přičteme a ihned odečteme vhodné číslo, **součet zlomků:**

$$\frac{4x + 9}{x + 2} = \frac{4x + 8 - 8 + 9}{x + 2} = \frac{4(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{4(x + 2)}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = 4 + \frac{1}{x + 2}$$

2. způsob – dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r} (4x + 9) : (x + 2) = 4 + \frac{1}{x + 2} \\ \underline{-(4x + 8)} \\ 1 \end{array}$$

Předpis funkce upraven do tvaru: $g: y = 4 + \frac{1}{x+2}$

Definiční obor funkce: $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Lomený výraz \Rightarrow jmenovatel musí být různý od nuly $\Rightarrow x + 2 \neq 0; x \neq -2$

ad 2.1 Průsečíky grafu funkce g se souřadnými osami:

Průsečík se souřadnou osou x : $y = 0$

$$0 = 4 + \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow -4 = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow -4(x+2) = 1$$
$$-4x - 8 = 1 \Leftrightarrow -4x = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$X_1 = \left[-\frac{9}{4}; 0\right]$$

Průsečík se souřadnou osou y : $x = 0$

$$y - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 4 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 4\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$$
$$X_2 = \left[0; \frac{9}{2}\right]$$

ad 2.2 Rovnice asymptot:

Platí $y = 4 + \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow y - 4 = \frac{1}{x+2}$, asymptoty prochází **středem $S[-2; 4]$**

(počítáno jako nulové body: $x + 2 = 0, y - 4 = 0$)

Rovnice asymptot: $x = -2$; $y = 4$

ad 2.3 Sestrojte graf funkce g : $y = 4 + \frac{1}{x+2}$

1. krok: Úprava předpisu funkce, substituce – určení typu funkce a grafu

$y - 4 = \frac{1}{x+2}$; substituce $y' = \frac{1}{x'}$ předpis nepřímé úměrnosti, graf hyperbola

($k > 0 \Rightarrow$ graf – větve hyperboly v I. a III. kvadrantu)

2. krok: Provedeme posunutí KSS:

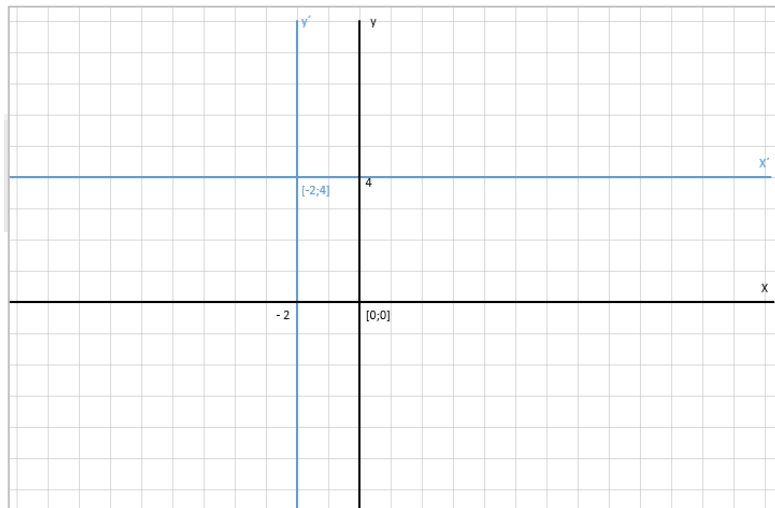
$$y' = y - 4 \quad x' = x + 2$$

$$y - 4 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$y = 4 \quad x = -2$$

posunutí KSS do bodu $S = [-2; 4]$ – do KSS

barevně vyznačíme osy x', y' .



3. krok: Tabulka hodnot

Pro náčrt grafu potřebujeme aspoň 3 body

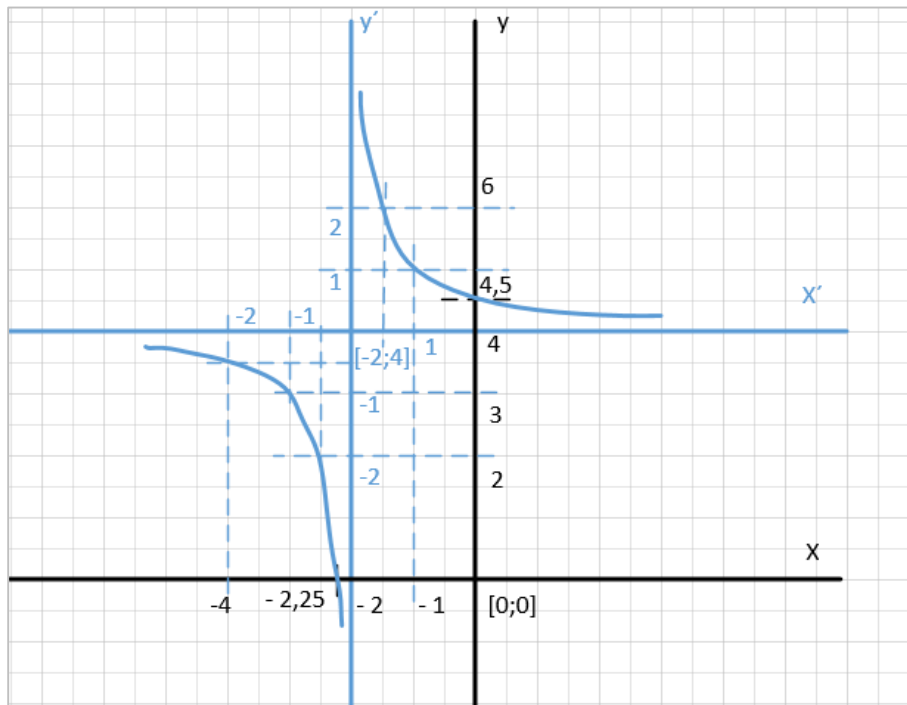
pro každou větev hyperboly.

Dosazovat lze do upraveného funkčního předpisu $y' = \frac{1}{x'}$:

Body pak vynášíme do posunuté „barevné“ KSS.

4. krok: Narýsujeme graf funkce: $y = \frac{4x+9}{x+2}$

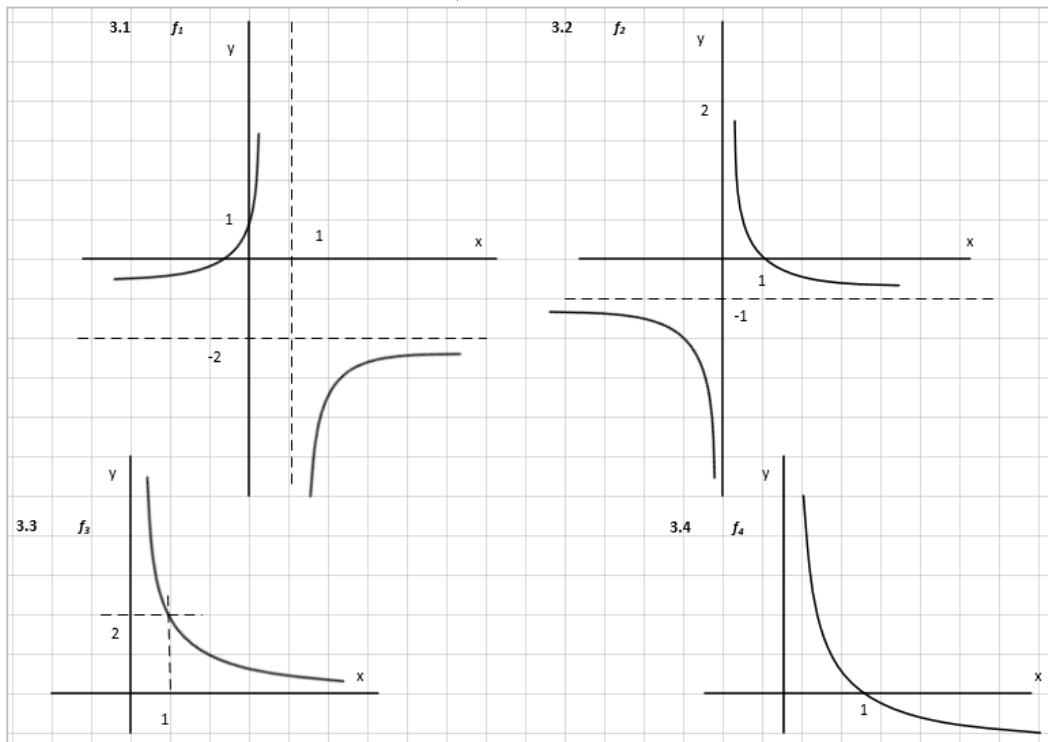
x'	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
y'	-0,5	-1	-2	2	1	0,5



Př. 3: Přiřadte ke každému grafu funkce $f_1 - f_4$ (3.1 – 3.4) pro $x \in \mathbb{R}^+$, resp. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, resp. $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ odpovídající předpis funkce (A – F).

3.1 f_1 : _____

3.2 f_2 : _____



3.3 f_3 : _____

3.4 f_4 : _____

A) $y = \frac{2}{x}$

B) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

C) $y = \frac{-3}{x-1} - 2$

D) $y = \frac{-2}{x}$

E) $y = \frac{2-2x}{2x}$

F) $y = 2^x$

Řešení:

3.1 Graf funkce f_1 : hyperbola ve II. a IV. kvadrantu – nepřímá úměrnost, kde $k < 0$; KSS posunuta – střed

$S[1; -2]$ správná odpověď: **C** $f_1: y = \frac{-3}{x-1} - 2$

3.2 Graf funkce f_2 : hyperbola v I. a III. kvadrantu – nepřímá úměrnost, kde $k > 0$; KSS posunuta – střed

$S[0; -1]$ správná odpověď: **E** $f_2: y = \frac{2-2x}{2x}$ úprava: $y = \frac{2-2x}{2x} = \frac{2}{2x} - \frac{2x}{2x} = \frac{1}{x} - 1$

3.3 Graf funkce f_3 : Jedna větev hyperboly v I. kvadrantu – nepřímá úměrnost, kde $k > 0$; KSS není posunuta – střed $S[0; 0]$ správná odpověď: **A** $f_3: y = \frac{2}{x}$

3.4 Graf funkce f_4 : KSS není posunuta – střed $S[0; 0]$; nejedná se o nepřímou úměrnost. Ze zbývajících funkcí lze volit varianty **B, F** – podle průsečíku s osou x v bodě $[1; 0]$ usoudíme, že grafem je logaritmická křivka. správná odpověď **B** $f_4: y = \log_{\frac{1}{2}} x$